Ueber einen Satz von den

Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

der

Doctorwürde

bei der

naturwissenschaftlichen Facultät

der

Königlich Württembergischen Universität

zu Tübingen

eingereicht von

Edmund Lassalle

aus Berlin.

Tübingen, 1885.

Druck von Heinrich Laupp.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550006_0024

Der Satz, um den es sich hier handelt, ist auf eine merkwürdige Weise zum ersten Male gefunden worden, was jedenfalls im Stande sein wird, einiges Interesse für ihn zu erwecken. In dem Texte des jetzt seltenen Verzeichnisses von Modellen geometrischer Flächen, betitelt: Axonometrische Projektionen der wichtigsten geometrischen Flächen von F. Engel, heisst es nämlich: »Ich habe gefunden, dass in jedem durch zwei Paare von Krümmungslinien gebildeten Vierecke — es ist die Rede von dem Ellipsoide — die geradlinigen Diagonalen einander gleich sind. Mit Hilfe dieses Satzes, der nicht allein für die Flächen zweiten Grades, sondern auch für die abwickelbare Schraubenfläche gilt, habe ich zuerst die Scheitel einer Reihe Krümmungslinien bestimmt.« Zu diesem Engel'schen Atlas hat F. Joachimsthal ein Vorwort geschrieben, in welchem in Bezug auf obige Stelle des Textes bemerkt wird: »Zur Construktion der Krümmungscurven hatte Herr Engel zuerst sich nur der von Monge angegebenen Projektionen bedient. Er fand dabei — und ich führe dies an, um einen Begriff von der Genauigkeit seiner graphischen Construktionen zu geben — dass die Vierecke, deren Seiten Bogen von Krümmungslinien sind, gleiche geradlinige Diagonalen haben. So viel ich weiss, ist der Satz, unter dieser Form wenigstens, neu«. Aus diesem ist ersichtlich, dass Engel diesen merkwürdigen Satz in Folge der Genauigkeit, mit der er seine Modelle herstellte, zuerst auf rein mechanischem Wege gefunden hat.

In dem Vorworte fährt dann Joachimsthal fort: »Man erhält ihn aus dem bekannten Jvory'schen Satze, wenn man damit die Bemerkung von Chasles verbindet, dass eine Curve, welche ein System confocaler Flächen rechtwinklig schneidet, dasselbe in correspondierenden Punkten trifft.« Auf diese Weise ist in der That der Satz in einer Abhandlung: Die Jakobische Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades von O. Hermes in Crelle's Journal Band 73 bewiesen worden. Gleichwohl dürfte ein direkter Nachweis für die Richtigkeit dieses interessanten Satzes ausgeführt an den einzelnen Flächen zweiten Grades noch einige Beachtung verdienen, zumal dort der Satz nur für die drei Flächen mit einem Mittelpunkte, dem Ellipsoid und den beiden Hyperboloiden, bewiesen ist, also der Beweis namentlich für die Paraboloide noch erübrigt. Einen direkten Nachweis für alle Flächen zweiten Grades zu erbringen soll der Zweck der vorliegenden Abhandlung sein, jedoch mag, wenn auch ganz kurz der in jener Abhandlung enthaltene Beweis auch hier Berücksichtigung finden.

Das Ellipsoid.

Ist die Gleichung einer Fläche gegeben in der Form $z = S(x, y)$ und bedeuten $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, so ist bekanntlich die Differentialgleichung der Krümmungslinien dieser Fläche:

$$(dx + pdz)dq - (dy + qdz)dp = 0.$$

Nun sei die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wo $a > b > c$ vorausgesetzt ist.

Dann wird

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z} \text{ und}$$

$$dp = \frac{c^2 x}{a^2 z^2}\, dz - \frac{c^2}{a^2 z}\, dx,$$

$$dq = \frac{c^2 y}{b^2 z^2}\, dz - \frac{c^2}{b^2 z}.$$

Darnach wird die Differentialgleichung für die Krümmungslinien des Ellipsoids:

$$\left(dy - \frac{c^2 y}{b^2 z}\, dz\right)\left(\frac{c^2 x}{a^2 z^2}\, dz - \frac{c^2}{a^2 z}\, dx\right) - \left(dx - \frac{a^2 z}{c^2 x}\, dz\right).$$

$$\left(\frac{c^2 y}{b^2 z^2}\, dz - \frac{c^2}{b^3 z}\, dy\right) = 0.$$

Hieraus geht nach kurzen Umformungen die Gleichung hervor:

$$0 = \frac{dx\,dy}{b^2 z} - \frac{dx\,dy}{a^2 z} + dz\left(\frac{xdy}{a^2 z^2} - \frac{c^2 x dy}{a^2 b^2 z^2} + \frac{c^2 y dx}{a^2 b^2 z^2} - \frac{ydx}{b^2 z^2}\right)$$

oder, wenn man noch mit $\frac{z^3}{c^2}$ multipliciert:

$$0 = z^2\left(\frac{dx\,dy}{b^2 c^2} - \frac{dx dy}{a^2 c^2}\right) + z dz\left(\frac{xdy}{a^2 c^2} - \frac{xdy}{a^2 b^2} + \frac{ydx}{a^2 b^2} - \frac{ydx}{b^2 c^2}\right).$$

Es ist aber die Gleichung des Ellipsoids:

$$z^2 = c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \text{ und also}$$

$$z dz = -c^2\left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2}\right).$$

Setzt man diese Werthe ein, so gewinnt unsere Differentialgleichung die Gestalt:

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} \cdot xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left\{\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 - (a^2 - b^2)\right\}\frac{dy}{dx} -$$

$$- \frac{a^2 - c^2}{a^2} xy = 0.$$

Führt man zur Abkürzung folgende Zeichen ein:

$$\frac{a^2-c^2}{a^2} = \alpha^2, \quad \frac{b^2-c^2}{c^2} = \beta^2, \quad a^2-b^2 = \gamma^2,$$

und macht die Substitution:

$$xy\frac{dy}{dx} = t^2,$$

so ergibt sich sofort:

$\beta^2t^4 + (\alpha^2x^2) - \beta^2y^2 - \gamma^2)t^2 - \alpha^2x^2y^2 = 0$, wenn man noch mit xy multiplicierte. Oder:

$$y^2(\beta^2t^2 + \alpha^2x^2) = \beta^2t^4 + \alpha^2x^2t^2 - \gamma^2t^2$$

$$y^2 = t^2 - \frac{\gamma^2t^2}{\beta^2t^2+\alpha^2x^2}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiation:

$$ydy = tdt - \frac{\gamma^2tdt}{\beta^2t^2+\alpha^2x^2} + \frac{(\beta^2tdt+\alpha^2xdx)\gamma^2t^2}{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2}.$$

Nach der eingeführten Substitution ist auch $ydy = \frac{t^2dx}{x}$.

Setzt man diese beiden Werthe für ydy einander gleich, so hat man:

$$\frac{t^2dx}{x} = tdt - \frac{\gamma^2tdt}{\beta^2t^2+\alpha^2x^2} + \frac{(\beta^2tdt+\alpha^2ydx)\gamma^2t^2}{(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2}$$

$$\left(\frac{t^2dx}{x} - tdt\right)(\beta^2t^2+\alpha^2x^2)^2 = tdt(\beta^2\gamma^2t^2 - \gamma^2\beta^2t^2 - \gamma^2\alpha^2x^2)$$

$$+ \alpha^2\gamma^2t^2xdx.$$

Nach Division durch t:

$$(tdx - xdt)[(\beta^2t^2 + \alpha^2x^2)^2 - \alpha^2\gamma^2x^2] = 0.$$

Der zweite Faktor gleich Null gesetzt, liefert nicht die allgemeine Lösung, weil in dieselbe keine willkürliche Constante eingeht. Es muss also

$$tdy - xdt = 0$$

genommen werden. Die Integration dieser Differentialgleichung gibt:

$$t = k \,.\, x,$$

wo k eine wirkliche Konstante bedeutet.

Geht man mit diesem Werthe von t in die Gleichung für y^2 ein, so erhält man

$$y^2 = k^2x^2 - \frac{\gamma^2k^2}{\beta^2k^2+\alpha^2}.$$

Wenn man nun noch, um eine mehr symmetrische Form zu haben, statt k setzt:

$$k^2 = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{b^2+\lambda}{a^2+\lambda},$$

wo nun λ die willkürliche Konstante ist, so ergibt sich als die gesuchte Gleichung:

$$\frac{\alpha^2y^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2y^2}{b^2+\lambda} = 1.$$

Und nun gibt diese Gleichung und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Krümmungslinien, und zwar sämmtliche, wenn man λ wie einen variabelen Parameter ansieht. Führt man in der ersteren Gleichung für α und β wieder ihre Werthe ein, so wird:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{c^2x^2}{a^2(a^2+\lambda)} - \frac{c^2y^2}{b^2(b^2+\lambda)} = 1.$$

Ferner ist

$$\frac{c^2x^2}{a^2(c^2+\lambda)} + \frac{c^2y^2}{b^2(c^2+\lambda)} + \frac{c^2z^2}{c^2(c^2+\lambda)} = \frac{c^2}{c^2+\lambda},$$

indem man die Gleichung des Ellipsoids mit $\frac{c^2}{c^2-\lambda}$ multiplicierte. Durch Addition erhält man:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} \cdot \left\{ \frac{a^2-c^2}{a^2(a^2+\lambda)}x^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2(b^2+\lambda)}y^2 \right\} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 + \frac{c^2}{c^2+\lambda}.$$

Oder da der Klammerausdruck vermöge der ersteren Gleichung gleich 1 ist:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

Demnach sind also die Gleichungen der Krümmungslinien auf dem Ellipsoide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

Die zweite Gleichung stellt ebenfalls eine Fläche zweiten Grades dar und zwar eine mit dem gegebenen Ellipsoid confocale. Dieselbe ist ein einschaliges Hyperboloid, wenn der dritte Nenner allein negativ ist; dagegen ein zweischaliges Hyperboloid, wenn die beiden letzten Nenner gleichzeitig negativ sind.

Wir sind hiermit zu dem bekannten Satze gelangt, dass die Krümmungslinien des Ellipsoids ausgeschnitten werden durch die beiden Systeme confocaler Hyperboloide, ein Satz, der sich bekanntlich aus dem Dupin'schen Satze ergibt mit Rücksicht auf die Fundamentaleigenschaft confocaler Flächen zweiten Grades, dass nämlich diese sich rechtwinklig durchschneiden.

Nach diesem folge nun zunächst der Beweis unseres Satzes in der Weise, wie er in der oben genannten Abhandlung enthalten ist.

Zu dem gegebenen Ellipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sei die Gleichung eines confocalen Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1,$$

wo λ alle Werthe von $-c^2$ bis $+\infty$ durchlaufen kann.

Zwei Punkte dieser Ellipsoide P und Q, deren Coordinaten sind:

$$x = a \,.\, \alpha, \quad y = b \,.\, \beta, \quad z = c \,.\, \gamma$$

$$x = \sqrt{a^2+\lambda} \,.\, \alpha, \; y = \sqrt{b^2+\lambda} \,.\, \beta, \; z = \sqrt{c^2+\lambda} \,.\, \gamma$$

werden conjugiert genannt; dabei ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Hat man zwei andere conjugierte Punkte P_1 und Q_1, deren Coordinaten sind:

$$x = a \,.\, \alpha_1, \quad y = b \,, \beta_1, \quad z = c\gamma_1$$

$$x = \sqrt{a^2+\lambda} \,.\, \alpha_1, \; y = \sqrt{b^2+\lambda} \,.\, \beta_1, \; z = \sqrt{c^2+\lambda} \,.\, \gamma_1$$

wo wieder $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$, so wird:

$$\overline{PQ_1}^2 = (a\alpha - \sqrt{a^2+\lambda} \,.\, \alpha_1)^2 + (b\beta - \sqrt{b^2+\lambda} \,.\, \beta_1)^2 + (c\gamma - \sqrt{c^2+\lambda} \,.\, \gamma_1)^2$$

$$\overline{P_1Q}^2 = (\sqrt{a^2+\lambda} \,.\, \alpha - a\alpha_1)^2 + (\sqrt{b^2+\lambda} \,.\, \beta - b\beta_1)^2 + (\sqrt{c^2+\lambda} \,.\, \gamma - c\gamma_1)^2$$

und daher

$$\overline{PQ_1}^2 - \overline{P_1Q}^2 = \lambda \,.\, (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = 0$$

das heisst $\overline{PQ_1} = \overline{P_1Q}$, welches der Ivory'sche Satz für Ellipsoide ist.

Nun lässt sich aber sehr leicht folgender Satz beweisen:

»Wenn sich ein Punkt Q auf einer Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades (II) bewegt, so durchläuft der conjugierte Punkt P einer confocalen Fläche (I) die conjugierte Krümmungslinie dieser Fläche, das heisst diejenige, welche mit der ersteren auf derselben confocalen Fläche (III) liegt, nämlich auf derjenigen, deren Durchschnittscurven mit den beiden gegebenen Flächen diese Krümmungslinien sind.«

Die gegebenen Flächen seien:

$$\text{I.} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\text{II.}\quad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

und die conjugierten Punkte P und Q haben wieder dieselben Coordinaten wie oben. Bewegt sich nun der Punkt Q zugleich auf der Fläche

$$\text{III.}\quad \frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1$$

beschreibt er also eine Krümmungslinie auf der Fläche II, dann gehört der Punkt P zugleich der Fläche

$$\frac{x^2(a^2+\lambda)}{a^2(a^2+\mu)}+\frac{y^2(b^2+\lambda)}{b^2(b^2+\mu)}+\frac{z^2(c^2+\lambda)}{c^2(c^2+\mu)}=1 \text{ an,}$$

das heisst, er liegt auf dem Durchschnitt dieser Fläche mit der Fläche I. Die Projektion aber dieser Durchschnittscurve auf irgend eine der Coordinatenebenen, z. B. die xy-Ebene wird

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{a^2(a^2+\mu)}+\frac{y^2(b^2-c^2)}{b^2(b^2+\mu)}=1,$$

das heisst, sie ist unabhängig von λ, dem Parameter der Fläche II, und es ist dieselbe Gleichung wie die der Projektion der Schnittcurve der Fläche I und III auf die xy-Ebene. Nun sind aber, wie wir oben gefunden, die Schnittcurven der drei Flächen I, II und III nichts anderes als die Krümmungslinien dieser Flächen.

»Wenn also zwei conjugierte Punkte P und Q auf zwei confocalen Flächen I und II gegeben sind, von welchen Flächen die erstere unveränderlich bleibt, während die zweite einen variabelen Parameter enthält, so liegt der Punkt Q, je nachdem man den festen Punkt P ansieht als Punkt der einen oder der anderen Krümmungslinie von I, fortdauernd auf der confocalen Fläche des einen oder des anderen Systems, durch deren Durchschneidung mit I diese Krümmungslinien hervorgehen, also auf der Schnittcurve dieser Flächen selber.«

Hieraus ergibt sich nun sofort unser Satz in entsprechender Form:

»Wenn man auf einer Fläche zweiten Grades beide Systeme von Krümmungslinien construiert, so bestimmen jede zwei Paar Krümmungslinien verschiedener Systeme durch ihre Durchschneidung zusammengehörige Systeme von je vier Punkten, welche paarweise conjugiert sind, also, als Eckpunkte von Vierecken angesehen, in der Beziehung zu einander stehen, dass die beiden Diagonalen dieser Vierecke einander gleich sind.«

So wird der Beweis des Satzes in jener Abhandlung geführt. Da der Ivory'sche Satz auch für die Hyperboloide giltig ist, so umfasst dieser Beweis die drei ersten Flächen zweiten Grades, das Ellipsoid, das einschalige und das zweischalige Hyperboloid. Es fehlt aber noch die Ausdehnung des in Rede stehenden Satzes auf die Paraboloide und die übrigen Flächen zweiten Grades Wenn wir daher für unseren Satz einen direkten Nachweis durchführen und zwar durchführen an allen Flächen zweiten Grades, so glauben wir, damit eine Lücke ausfüllen.

Um nun auf dem Ellipsoid ein Paar bestimmter Krümmungslinien zu fixieren, wollen wir die Gleichungen der beiden Krümmungslinien aufstellen, welche durch den Punkt P: $x_1 y_1 z_1$ gehen. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir annehmen, dass $x_1 y_1 z_1$ positiv sind, also der Punkt im ersten Octanten liegt.

Die Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ des Punktes auf dem Ellipsoid bestimmen die Werthe von λ, welche den beiden anderen durch denselben Punkt gelegten confocalen Oberfiächen zweiten Grades entsprechen. Wir haben zur Berechnung dieser Werthe die Gleichungen:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2+\lambda} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda} + \frac{z_1^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

Eine Wurzel der zweiten in λ cubischen Gleichung ist gleich Null, weil dieser Werth in dieselbe eingesetzt, sie befriedigt. Denn unter allen Flächen zweiten Grades:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1$$

ist eben auch das gegebene Ellipsoid enthalten.

Die Elimination von z_1^2 aus beiden Gleichungen ergibt die Gleichung:

$$\frac{\lambda(a^2-c^2)}{a^2c^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \cdot x_1^2 + \frac{\lambda(b^2-c^2)}{b^2c^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \cdot y_1^2 = \frac{\lambda}{c^2(c^2+\lambda)},$$

woraus sich $\frac{\lambda}{c^2+\lambda}$ forthebt, wie es sein muss, da eine Wurzel gleich Null ist.

Die beiden anderen Wurzeln ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2+\lambda)} \cdot x_1^2 + \frac{b^2-c^2}{b^2(b^2+\lambda)} y_1^2 - 1 = 0.$$

Ordnet man dieselbe nach λ, so kommt:

$$\lambda^2 + \lambda\left(a^2+b^2 - \frac{a^2-c^2}{a^2} x_1^2 - \frac{b^2-c^2}{b^2} y_1^2\right) =$$

$$= b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 - \frac{b^2c^2}{a^2} x_1^2 - \frac{a^2c^2}{b^2} y_1^2.$$

Nun ist aber die erstere unserer Gleichungen:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = -\frac{z_1^2}{c^2} \quad \text{also}$$

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2 = -\frac{a^2b^2}{c^2} z_1^2.$$

Ferner ist:

$$c^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = c^2\left(1 - \frac{z_1^2}{c^2}\right) = c^2 - z_1^2.$$

Mit diesen Werthen geht die Gleichung:

$$\lambda^2 - \lambda\left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{c^2x_1^2}{a^2} - \frac{c^2y_1^2}{b^2} - a^2 - b^2\right) =$$
$$- \frac{b^2c^2}{a^2}x_1^2 - \frac{a^2c^2}{b^2}y_1^2 + b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2$$

über in:

$$\lambda^2 - \lambda[(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (a^2 + b^2 + c^2)] =$$
$$- a^2b^2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} - + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^4}\right).$$

Setzt man:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2A_1$$
$$a^2b^2c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} + \frac{z_1^2}{c^4}\right) = B_1,$$

so ergibt sich aus:

$$\lambda^2 - 2A_1\lambda + B_1 = 0:$$
$$\lambda_1 = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}$$
$$\lambda_2 = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}.$$

Die beiden durch den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gehenden Krümmungslinien haben demnach die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} + \frac{z^2}{c^2+\lambda_1} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Curve (1.)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_2} + \frac{z^2}{c^2+\lambda_2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Curve (2.)}$$

Fixieren wir nun auch noch ein Paar anderer Krümmungslinien, die durch einen zweiten Punkt Q_1: $x_2\, y_2\, z_2$ gehen, so findet sich für dieselben ganz analog:

$$\lambda_3 = A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2}$$
$$\lambda_4 = A_2 - \sqrt{A_2^2 - B_2} \quad \text{wo}$$
$$2A_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$B_2 = a^2b^2c^2\left(\frac{x_2^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4} + \frac{z_2^2}{b^4}\right),$$

so dass also λ_3 aus λ_1, λ_4 aus λ_2, A_2 aus A_1 und B_2 aus B_1 hervorgeht, indem $x_1\,y_1\,z_1$ in $x_2\,y_2\,z_2$ übergehen.

Es sind die Gleichungen der durch den Punkt $x_2\,y_2\,z_2$ gehenden Krümmungslinien demnach:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_3} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_3} + \frac{z^2}{c^2+\lambda_3} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Curve (3.)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{a^2+\lambda_4} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_4} + \frac{z^2}{c^2+\lambda_4} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ Curve (4.)}$$

Für den Punkt P: $x_1\,y_1\,z_1$, den Schnittpunkt der Curven (1) und (2) gelten also die Gleichungen:

$$1.\quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1$$

$$2.\quad \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_1} + \frac{z_1^2}{c^2+\lambda_1} = 1$$

$$3.\quad \frac{x_1^2}{a^2+\lambda_2} + \frac{y_1^2}{b^2+\lambda_2} + \frac{z_1^2}{c^2+\lambda_2} = 1.$$

Die Elimination von z_1 aus 1. und 2. resp. aus 1. und 3. ergibt:

$$x_1^2 \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2(a^2+\lambda_1)} + y_1^2 \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2(b^2+\lambda_1)} = 1$$

$$x_1^2 \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2(a^2+\lambda_2)} + y_1^2 \cdot \frac{b^2-c^2}{b^2(b^2+\lambda_2)} = 1.$$

Wird hieraus noch y_1 eliminiert und dann x_1, y_1, z_1 und a, b, c cyklisch vertauscht, so folgt:

$$x_1^2 = \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} \cdot (a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)$$

$$y_1^2 = \frac{b^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \cdot (b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)$$

$$z_1^2 = \frac{c^2}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \cdot (c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2).$$

Und durch Vertauschung der Indices erhält man für den Punkt Q_1:

$$x_2^2 = \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} \cdot (a^2+\lambda_3)(a^2+\lambda_4)$$

$$y_2^2 = \frac{b^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \cdot (b^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_4)$$

$$z_2^2 = \frac{c^2}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \cdot (c^2+\lambda_3)(c^2+\lambda_4).$$

Der Schnittpunkt der Curven (2) und (3), P_1, habe die Coordinaten: ξ_1, η_1, ζ_1, der der Curven (1) und (4), Q_1 die Coordinaten: ξ_2, η_2, ζ_2.

Man erhält für sie auf dieselbe Weise wie oben:

$$\xi_1^2 = \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} (a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)$$

$$\xi_2^2 = \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} (a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_4).$$

Bildet man nun $x_1^2 \cdot x_2^2$ und $\xi_1^2 \cdot \zeta_2^2$, so erkennt man aus der Vergleichung der Parameterausdrücke sofort deren Gleichheit. $x_1^2 \cdot x_2^2 = \xi_1^2 \cdot \xi_2^2$. Dasselbe gilt für $y_1^2 \cdot y_2^2 = \eta_1^2 \cdot \eta_2^2$ und $z_1^2 \cdot z_2^2 = \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2$.

Wir wollen nun nachweisen, dass:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) + (\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2).$$

Die Summe:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2),$$

wird gleich:

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \cdot \Big\{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2) + (a^2+\lambda_3)(a^2+\lambda_4) - (a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3) - (a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_4)\Big\}$$

$$+\frac{b^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\cdot\{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)+(b^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_4)$$
$$-(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)-(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_4)\}$$
$$+\frac{c^2}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\cdot\{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)+(c^2+\lambda_3)(c_2+\lambda_4)$$
$$-(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)-(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_4)\}.$$

Jeder der Klammerausdrücke reduciert sich auf:

$$\lambda_1\,.\,\lambda_2+\lambda_3\,.\,\lambda_4-\lambda_2\,.\,\lambda_3-\lambda_1\,.\,\lambda_4,$$

so dass also obige Summe wird:

$$\left\{\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^2}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\right\}$$
$$\cdot\{\lambda_1\,.\,\lambda_2+\lambda_3\lambda_4-\lambda_2\lambda_4-\lambda_1\lambda_4\}\,.$$

Die erste Klammer ist aber identisch gleich Null, folglich:

$$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)$$
$$-(\xi_1^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)=0.$$

Hält man dieses Resultat mit der oben gefundenen Gleichheit der Produkte der Coordinaten zusammen, so hat man:

$$(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2=(x_1-x_2^2)+(y_1-y_2)^2$$
$$+(z_1-z_2)^2,$$

das heisst

$$\overline{PQ_1}=\overline{P_1Q}.$$

Setzt man in der Gleichung des Ellipsoids $c\,.\sqrt{-1}$ statt c, so geht sie über in die Gleichung des einschaligen Hyperboloids, und wenn man zugleich $b\,.\sqrt{-1}$, $c\,.\sqrt{-1}$ für b und c setzt, so stellt sie das zweischalige Hyperboloid dar. In beiden Fällen wird aber die Berechnung, wie sie für das Ellipsoid durchgeführt ist, durchaus nicht alteriert, und da im Resultate das b und c nicht vorkommt, so genügt diese Bemerkung, um den Satz auch für die Hyperboloide bewiesen zu haben.

Die Paraboloide.

Die Gleichung des elliptischen Paraboloids nehmen wir in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Die allgemeine Gleichung der Krümmungslinien

$$(dx + pdz)dq = (dy + qdz)dp$$

gestaltet sich dann folgendermassen:

$$\text{Es ist } p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a^2},\ dp = \frac{dx}{a^2}$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{b^2},\ dq = \frac{dy}{b^2},\ \text{also}$$

$$(a^2 - b^2)dxdy + dz(xdy - ydx) = 0.$$

Oder da:

$$dz = \frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2}$$

$$\left(a^2 - b^2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)dxdy + \frac{xy}{b^2}dy^2 - \frac{xy}{a^2}dx^2 = 0$$

$$\frac{1}{b^2}xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + a^2 - b^2\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{a^2}xy = 0.$$

Führt man auch hier die Substitution:

$$xy\frac{dy}{dx} = t^2 \text{ ein, so wird}$$

$$\frac{1}{b^2}t^4 + \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + a^2 - b^2\right)t^2 - \frac{x^2y^2}{a^2} = 0,$$

wenn man noch mit xy multiplicierte.

Setzt man noch

$$\frac{1}{b^2} = \beta^2,\ \frac{1}{a^2} = \alpha^2,\ b^2 - a^2 = \gamma,$$

so erhält man dieselbe Gleichung wie oben:

$$\beta^2t^4 + (\alpha^2x^2 - \beta^2y^2 - \gamma^2)t^2 - \alpha^2x^2y^2$$

und bekommt also wie da:

$$t = k.x \text{ und}$$

$$y^2 = k^2x^2 - \frac{\gamma^2k^2}{\beta^2k^2+\alpha^2} \quad \text{oder}$$

$$y^2 = k^2x^2 + \frac{a^2b^2(a^2-b^2)k^2}{a^2k^2+b^2}.$$

Um eine für die Rechnung bequemere Form zu haben, setzen wir:

$$k^2 = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{\lambda-b^2}{\lambda-a^2}$$

und erhalten die beiden Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

$$\frac{x^2}{a^2(\lambda-a^2)} + \frac{y^2}{b^2(\lambda-b^2)} = 1,$$

welche die beiden Scharen von Krümmungslinien darstellen. Die zweite Gleichung gehört einem elliptischen oder hyperbolischen Cylinder an, je nachdem $a^2 > b^2 > \lambda$ oder $a^2 > \lambda > b^2$ ist, und zwar sind die Leitcurven der beiden Cylinder in der xy-Ebene confokale Ellipsen oder Hyperbeln, die sich bekanntlich rechtwinklig schneiden.

Fassen wir auch hier wieder zwei Punkte P und Q_1 mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 in's Auge, von denen wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, annehmen, dass sie beide im ersten Octanten liegen. Die Werthe dieser Coordinaten bestimmen die Werthe von λ welche in die obigen Gleichungen eingesetzt, die beiden Paare von Krümmungslinien ergeben, welche durch die beiden Punkte P und Q_1 hindurch gehen.

Für die beiden durch den Punkt P gehenden Krümmungslinien bestehen die Gleichungen:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 2z_1$$

$$\frac{x_1^2}{a^2(\lambda-a^2)} + \frac{y_1^2}{b^2(\lambda-b^2)} = 1,$$

woraus:

$$x_1^2b^2(\lambda-b^2) + y_1^2a^2(\lambda-a^2) = a^2b^2(\lambda-a^2)(\lambda-b^2)$$
$$\lambda(x_1^2b^2+y_1^2a^2) - b^4x_1^2 - a^4y^2 = a^2b^2(\lambda^2 - \lambda(a^2+b^2) + a^2b^2).$$

Oder da:

$$x_1^2b^2 + y_1^2a^2 = 2a^2b^2z_1^2$$

$$\lambda^2 - \lambda(a^2 + b^2 + 2z_1) = -a^2b^2\left(1 + \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right).$$

Setzt man:

$$a^2 + b^2 + 2z_1 = 2A_1$$

$$a^2b^2\left(1 + \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right) = B_1, \text{ so wird}$$

$$\lambda^2 - 2A_1\lambda = -B_1 \text{ und ergibt:}$$

$$\lambda_1 = A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1}$$

$$\lambda_2 = A_1 - \sqrt{A_1^2 - B_1}.$$

Für die beiden durch den Punkt Q_1 gehenden Krümmungslinien ergibt sich ebenso:

$$\lambda_3 = A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2}$$

$$\lambda_4 = A_2 - \sqrt{A_2^2 - B_2},$$

wenn $a^2 + b^2 + 2z_2 = 2A_2$

$$a^2b^2\left(1 + \frac{x_2^2}{a^4} + \frac{y_2^2}{b^4}\right) = B_2 \text{ gesetzt ist.}$$

Hiernach liessen sich wieder leicht die Gleichung der vier in Betracht zu ziehenden Krümmungslinien sofort hinschreiben.

Wir gehen über zur Bestimmung der Coordinaten des Schnittpunktes P_1 der Curven (2) und (3), welche mit $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$, und Q der Curven (1) und (4), welche mit $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ bezeichnet werden mögen. Es ist dann $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ bestimmt durch die drei Gleichungen:

1. $$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = 2\zeta_1.$$

2. $$\frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_2-a^2)} + \frac{\eta_1^2}{b^2(\lambda_2-b^2)} = 1.$$

3. $$\frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_3-a^2)} + \frac{\eta_1^2}{b^2(\lambda_3-b^2)} = 1.$$

Für den Punkt $\xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ gelten die analogen Gleichungen mit λ_1 und λ_4.

Aus den Gleichungen 1 und 2 erhält man sofort durch Elimination von η_i resp. ξ_i, sowie aus den analogen Gleichungen durch Elimination der entsprechenden Grössen:

$$4.\quad \begin{aligned} \xi_1^2 &= \frac{a^2}{b^2-a^2}(2\zeta_1 + b^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - a^2) \\ \xi_2^2 &= \frac{a^2}{b^2-a^2}(2\zeta_2 + b^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - a^2) \\ \eta_1^2 &= \frac{b^2}{a^2-b^2}(2\zeta_1 + a^2 - \lambda_2)(\lambda_2 - b^2) \\ \eta_2^2 &= \frac{b^2}{a^2-b^2}(2\zeta_2 + a^2 - \lambda_1)(\lambda_1 - b^2)\ *). \end{aligned}$$

---

*) Diese Formeln und die entsprechenden für x_1, y_1, x_2, y_2 erhält man aus den für das Ellipsoid geltenden durch den bekannten Grenzübergang vom Ellipsoid zum elliptischen Paraboloid. Setzt man nämlich:

$$a^2 = b^2 = \infty, \quad c^2 = \infty, \quad \lambda_2 = \infty, \quad \lambda_3 = \infty,$$

jedoch so, dass

$$\frac{a^2}{c} = \alpha^2, \ \frac{b^2}{c} = \beta^2, \ \frac{\lambda_2}{c} = \mu_2, \ \frac{\lambda_3}{c} = \mu_3$$

endliche Grössen bleiben, so erhält man aus

$$\xi_1^2 = \frac{a^2}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)} \cdot (a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)$$

durch jenen Grenzübergang:

$$\xi_1^2 = \frac{\frac{a^2}{c}}{\left(\frac{a^2}{c}\cdot\frac{1}{c}-1\right)\left(\frac{a^2}{c}-\frac{b^2}{c}\right)} \cdot \left(\frac{a^2}{c}+\frac{\lambda_2}{c}\right)\left(\frac{a^2}{c}+\frac{\lambda_3}{c}\right)$$

$$\xi_1^2 = \frac{(\alpha^2+\mu_3)(\alpha^2+\mu_2)}{-1\,.\,(\alpha^2-\beta^2)} \cdot \alpha^2.$$

Setzt man noch $\zeta_2 + c$ statt ζ_2, so erhält man aus der Formel für ζ_1^2 die folgende:

$$\left(\frac{\zeta_2}{c} - 1\right)^2 (c-\alpha^2)(c-\beta^2) = (c+\mu_2)(c+\mu_3).$$

Die Ausführung des Grenzübergangs kommt hier auf den

Oder aber, wenn man aus 1 $\frac{\eta_1^2}{b^2}$ berechnet und in 2 und 3 einsetzt:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_2-a^2)} + \frac{2\zeta}{\lambda_2-b^2} - \frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_2-b^2)} = 1$$
$$\frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_3=a^2)} + \frac{2\zeta_1}{\lambda_3-b^2} - \frac{\xi_1^2}{a^2(\lambda_3-b^2)} = 1.$$

Durch Elimination von ζ_1 hieraus und durch Buchstaben, resp. Indices-Vertauschung erhält man:

$$\xi_1^2 = \frac{a^2}{b^2-a^2}(\lambda_2 - a^2)(\lambda_3 - a^2)$$

$$\xi_2^2 = \frac{a^2}{b^2-a^2}(\lambda_1 - a^2)(\lambda_4 - a^2)$$

$$\eta_1^2 = \frac{b^2}{a^2-b^2}(\lambda_2 - b^2)(\lambda_3 - b^2)$$

$$\eta_2^2 = \frac{b^2}{a^2-b^2}(\lambda_1 - b^2)(\lambda_4 - b^2).$$

Ferner ergibt sich sehr leicht:

$\lambda_2^2 - 2A_1\lambda_2 = -B_1$ und
$\lambda_3^2 - 2A_1\lambda_3 = -B_1$ also
$\lambda_2^2 - 2A_1\lambda_2 = \lambda_3^2 - 2A_1\lambda_3$, woraus
$2A_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ oder
$a^2 + b^2 + 2\zeta_1 = \lambda_2 + \lambda_3$ ebenso
$a^2 + b^2 + 2\zeta_2 = \lambda_1 + \lambda_4$, deren Addition:

$$a^2 + b^2 + (\zeta_1 + \zeta_2) = A_1 + A_2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + z_1 + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + z_2$$

das ist: $\zeta_1 + \zeta_2 = z_1 + z_2$.

Addieren wir nun $\xi_1^2 + \eta_1^2$ aus 5, so wird: $\xi_1^2 + \eta_1^2 =$

$$\frac{a^2}{b^2-a^2} \cdot (\lambda_2 - a^2)(\lambda_3 - a^2) + \frac{b^2}{a^2-b^2}(\lambda_2 - b^2)(\lambda_3 - b^2) =$$

Vergleich der Coefficienten der höchsten Potenz von c hinaus, die nicht von selbst heraus fällt. Es ist dies die erste. Man erhält so: $2\zeta_2 = \mu_2 + \mu_3 + \alpha^2 + \beta^2$, woraus sich μ_3 berechnen und in ξ_1^2 einsetzen lässt.

$$-\lambda_2 . \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)(a^2 + b^2) + \frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2}$$

und: $$\xi_2^2 + \eta_2^2 =$$

$$-\lambda_1 . \lambda_4 + (\lambda_1 + \lambda_4)(a^2 + b^2) + \frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2},$$

deren Summe:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 =$$

$$-\lambda_2 . \lambda_3 - \lambda_1 . \lambda_4 + (a^2 + b^2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 2\frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2} =$$

$$-2A_1 . A_2 + 2\sqrt{(A_1^2 - B_1)(A_2^2 - B_2)} + (a^2 + b^2)(2A_1 + 2A_2) + 2\frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2}.$$

Um $\sqrt{(A_1^2 - B_1)(A_2^2 - B_2)}$ zu finden, setzen wir die beiden für ξ_1^2 sich ergebenden Werthe aus 4. und 5. einander gleich und erhalten:

$$(2\zeta_1 + b^2 - \lambda_2) = \lambda_3 - a^2$$

$$2\zeta_1 + b^2 - A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1} = A_2 + \sqrt{A_2^2 - B_2} - a^2$$

$$\sqrt{A_1^2 - B_1} - \sqrt{A_2^2 - B_2} = A_1 + A_2 - a^2 - b^2 - 2\zeta_1$$

$$= z_1 + z_2 - 2\zeta_1,$$

aber da $$z_1 + z_2 = \zeta_1 + \zeta_2$$

$$\sqrt{A_1^2 - B_1} - \sqrt{A_2^2 - B_2} = \zeta_2 - \zeta_1.$$

Das Quadrat dieser Gleichung gibt:

$$2\sqrt{(A_1^2 - B_1)(A_2^2 - B_2)} = A_1^2 + A_2^2 - B_1 - B_2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2.$$

Folglich wird:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 =$$

$$-2A_1 . A_2 + A_1^2 + A_2^2 - B_1 - B_2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2$$

$$+ (a^2 + b^2)(2A_1 + 2A_2) + 2\frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2}$$

$$= (A_1 - A_2)^2 - (B_1 + B_2) + (a^2 + b^2)(2A_1 + 2A_2)$$

$$+ 2\frac{a^6 - b^6}{b^2 - a^2} - (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = (z_1 - z_2)^2$$

$$- \left(2a^2b^2 + \frac{b^2x_1^2}{a^2} + \frac{a^2y_1^2}{b^2} + \frac{b^2x_2^2}{a^2} + \frac{a^2y_2^2}{b^2}\right)$$

$$+ 2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + z_1 + z_2) - 2(a^4 + a^2b^2 + b^4) - (\zeta_1 - \zeta_2).$$

Führt man hierin statt $z_1 + z_2$ die Werthe aus der Gleichung des Paraboloides ein, so findet sich nach kurzen Reduktionen:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = (z_1 - z_2)^2 + x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2.$$

Berechnen wir nun auch noch $\xi_1 . \xi_2$ und $\eta_1 . \eta_2$! Nach 5. ist:

$$\xi_1^2 . \xi_2^2 = \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2}\right)^2 \left((\lambda_1 - a^2) . (\lambda_2 - a^2)(\lambda_3 - a^2)(\lambda_4 - a^2)\right)$$

$$= \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \cdot \left\{(A_1 + \sqrt{A_1^2 - B_1} - a^2)(A_1 - \sqrt{A_1^2 - B_1} - a^2)\right\} \left\{(\lambda_3 - a^2)(\lambda_4 - a^2)\right\}$$

$$= \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \cdot \left\{-2a^2A_1 + B_1 + a^4\right\}\left\{-2a^2A_2 + B_2 + a^4\right\}$$

$$= \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \cdot \left\{-2a^2z_1 + \frac{b^2x_1^2}{a^2} + \frac{a^2y_1^2}{b^2}\right\}\left\{-2a^2z_2 + \frac{b^2x_2^2}{a^2} + \frac{a^2y_2^2}{b^2}\right\}.$$

Nun ist aber:

$$2a^2z_1 = x_1^2 + \frac{a^2y_1^2}{b^2}, \quad \text{also } \xi_1^2 . \xi_2^2$$

$$= \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \cdot \left\{\frac{b^2x_1^2}{a^2} - x_1^2\right\}\left\{\frac{b^2x_2^2}{a^2} - x_2^2\right\} = x_1^2 . x_2^2.$$

Also:

$$\xi_1\xi_2 = x_1 . x_2 \text{ ebenso } \eta_1\eta_2 = y_1y_2.$$

Man hat aus den gefundenen Werthen sofort:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\eta_1\eta_2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

das heisst

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2).$$

Oder $PQ_1 = P_1Q.$

Der Kegel.

Obwohl es durch die geometrische Anschauung allein schon klar wird, dass unser Satz für die Kegel und Cylinder zweiten Grades unverändert gilt, so möge doch der Vollständigkeit wegen und auch für diese Flächen der Satz analog den obigen Untersuchungen bewiesen werden.

Wir nehmen die Gleichung der Kegel in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Es wird:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c^2 x}{a^2 z}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c^2 y}{a^2 z} \quad \text{und}$$

$$dp = \frac{c^2 dx}{a^2 z} - \frac{c^2 x}{a^2 z^2} dz$$

$$dq = \frac{c^2 dy}{b^2 z} - \frac{c^2 y}{b^2 z^2} dz.$$

Hiernach nimmt die allgemeine Gleichung

$$(dx + pdz)dq - (dy + qdz)dp = 0$$

für den Kegel die Gestalt an:

$$\left(dx + \frac{c^2 x}{a^2 z} dz\right)\left(\frac{c^2 dy}{b^2 z} - \frac{c^2 y}{b^2 z} dz\right) - \left(dy + \frac{c^2 y}{b^2 z} dz\right)\left(\frac{c^2 dx}{a^2 z} - \frac{c^2 x}{a^2 z^2} dz\right).$$

Oder, wenn man ausmultipliciert:

$$\frac{c^2}{b^2 z} dxdy - \frac{c^2 y}{b^2 z} dydz - \frac{c^4 x}{a^2 b^2 z^2} dydz - \frac{c^2}{a^2 z} dxdy$$

$$+ \frac{c^2 x}{a^2 z^2} dydz - \frac{c^4 y}{a^2 b^2 z^2} dzdx = 0.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit $\frac{z^3}{c^4}$ und ordnet nach z^2 und zdz, so kommt:

$$z^2\left(\frac{dxdy}{b^2 c^2} - \frac{dxdy}{a^2 c^2}\right) + zdz\left(\frac{xdy}{a^2 b^2} - \frac{ydx}{a^2 b^2} + \frac{xdy}{a^2 c^2} - \frac{ydx}{b^2 c^2}\right) = 0.$$

Setzt man aus der Gleichung des Kegels hierin die sich ergebenden Werthe für

$$z^2 = c^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$zdz = c^2\left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2}\right)$$ ein und für die Multiplicationen aus, so erhält man bald:

$$(dy)^2 \cdot xy(a^2b^2 + a^2c^2) + dxdy(a^2b^2x^2 - a^2b^2y^2 + b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2) - (dx)^2xy(a^2b^2 + b^2c^2) = 0.$$

Führt man der Uebersicht wegen folgende Bezeichnung ein: $\frac{b^2+c^2}{b^2} = \beta^2$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2} = \alpha^2$$ und multipliciert mit $\frac{xy}{a^2b^2}$, so wird endlich die gesuchte Differentialgleichung:

$$\beta^2 \cdot \left(xy\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\alpha^2x^2 - \beta^2y^2\right)\left(xy\frac{dy}{dx}\right) - \alpha^2x^2y^2 = 0.$$

Setzen wir wieder:

$$xy\frac{dy}{dx} = t,$$

so wird:

$$t^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2 - y^2\right)t = \frac{a^2}{\beta^2}x^2y^2, \text{ woraus:}$$

$$t = \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2y^2 + \frac{1}{4}\left(y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2\right) \pm \frac{1}{2}\left(y^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2\right).$$

Nennt man die beiden Wurzeln t_1 und t_2, so ist:

$$t_1 = y \qquad t_2 = -\frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2.$$

Darnach lässt sich also unsere Gleichung nach Faktoren schreiben:

$$\left(t - y\right)\left(t + \frac{\alpha^2}{\beta^2}x^2\right) = 0.$$

Und es ist: $t = y$ die eine Lösung. Setzt man diesen Werth in die Substitution ein, so erhält man die Gleichung $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, deren Lösung ist: $y = k \cdot x$.

Die andere Lösung aber:

$$t = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} x^2$$

lässt folgende Behandlung zu. Setze ich diesen Werth in die Substitution, so ergibt sich sofort die Gleichung:

$$xy \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha^2}{\beta^2} x^2,$$

deren Lösung:

$y^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} x^2 = C^2$, wo C die Integrationsconstante bedeutet. Führt man statt α und β wieder ihre Werthe und für $C^2 = \frac{b^2\lambda^2}{b^2+c^2}$ ein, so wird:

$$y^2 + \frac{a^2+c^2}{a^2} \cdot \frac{b^2}{b^2+c^2} x^2 = \frac{b^2\lambda^2}{b^2+c^2} \quad \text{oder}$$

$$a^2(b^2+c^2)y^2 + b^2(a^2+c^2)x^2 = a^2b^2\lambda^2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2} = \frac{\lambda^2}{c^2}.$$

Da noch aus der Gleichung des Kegels:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, so hat man endlich:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2.$$

Das ist die Gleichung einer Kugel, worin der Radius ein variabeler Parameter ist. Wir sind also zu dem — für conische Flächen allgemein giltigen — Satze gelangt, dass die Krümmungslinien eines Kegels zweiten Grades ausgeschnitten werden von durch die z-Axe gelegten Ebenen und Kugeln, deren Mittelpunkt mit der Spitze zusammenfällt.

Die durch einen bestimmten Punkt P: $x_1\ y_1\ z_1$

gehenden Krümmungslinien müssen den Gleichungen genügen:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{z_1^2}{c^2}$$

$$y_1 = k \cdot x_1$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \lambda_1^2, \quad \text{woraus:}$$

$$k_1 = \frac{y_1}{x_1} \quad \text{und} \quad \lambda_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

ebenso für einen zweiten Punkt $Q_1 : x_2\ y_2\ z_2$

$$k_2 = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2.$$

Der Schnittpunkt P_1 der Curven 2 und 3 habe die Coordinaten $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$. Diese haben dann den Gleichungen zu genügen:

1. $\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} - \frac{\zeta_1^2}{c^2} = 0$
2. $\eta_1 = k_2 \xi_1$
3. $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \lambda_1^2 = \lambda_1^2.$

Eliminiert man aus 1. und 3. durch Einsetzen des Werthes für η_1 aus 2. zunächst η_1 und dann durch Addition ζ_1, nachdem man 3. mit $\frac{1}{c^2}$ multiplicierte, so kommt:

$$\xi_1^2(b^2(a^2 + c^2) + a^2k_2^2(c^2 + b^2) = a^2b^2\lambda_1^2$$

$$\xi_1^2 = \frac{a^2b^2\lambda_1^2}{b^2(a^2 + c^2) + a^2k_2^2(c^2 + b^2)}$$

$$= \frac{a^2b^2(\lambda_2^2x_2^2}{a^2b^2(x_2^2 + y_2^2) + c^2(b^2x_2^2 + a^2y_2^2)},$$

indem man für k_2 seinen Werth einsetzte.

Es ist aber aus der Gleichung des Kegels:

$$b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = \frac{a^2b^2z_2^2}{c^2}. \quad \text{Also}$$

$$\xi_1^2 = \frac{a^2b^2\lambda_1^2x_2^2}{a^2b^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)} = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2}x_2^2$$

$$\xi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2.$$

Durch Vertauschung der Indices erhält man $\xi_2 = \frac{\lambda_2}{y_1} x_1$.

Geht man mit diesen Werthen ein in die Gleichung 2. und die ihr entsprechende:

$$\eta_2 = k_1 \cdot \xi_2, \text{ so folgt:}$$

$$\eta_1 = \frac{y_2}{x_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot x_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_2$$

$$\eta_2 = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot x_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} y_1.$$

Ferner ist:

$$\zeta_1^2 = c^2\left(\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2}\right) = c^2\left(\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \cdot \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} \frac{y_2^2}{b^2}\right)$$

$$= c^2 \cdot \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2} \cdot \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right) = \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} z_2^2, \text{ ebenso}$$

$$\zeta_2^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} z_1^2.$$

Demnach ist:

$$\xi_1 \cdot \xi_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x_2 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot x_1 = x_1 \cdot x_2$$

$$\eta_1 \cdot \eta_2 = y_1 y_2 \quad \zeta_1 \zeta_2 = z_1 \cdot z_2$$

und da aus Gleichung 3. und der ihr entsprechenden $\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = \lambda_2^2$ sich sofort durch Addition ergibt:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

so hat man:

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

oder $PQ_1 = P_1Q$.

Der Cylinder.

Die Gleichung des elliptischen Cylinders können wir nehmen in der Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Als Differentialgleichung der Krümmungslinien erhält man hier aus der allgemeinen Gleichung:

$$dz \cdot \frac{ydx - xdy}{a^2b^2} = 0,$$

welche in die beiden zerfällt:

$$dz = 0 \qquad ydx = xdy,$$

deren Lösungen:

$$z = k \qquad x = \lambda y.$$

Für den Punkt P: $x_1\, y_1\, z_1$ hat man dann

$$z_1 = k_1 \qquad x_1 = \lambda_1 y_1$$

und für den Punkt $Q_1 : x_2 y_2 z_2$:

$$z_2 = k_2 \qquad x_2 = \lambda_2 y_2.$$

Die Coordinaten des Schnittpunktes P_1: $\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1$ resp. Q: $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$ müssen den Gleichungen genügen:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} = 1$$

$$\xi_1 = \lambda_1 \eta_1$$

$$\zeta_1 = k_2 \qquad \text{und:}$$

$$\frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} = 1$$

$$\xi_2 = \lambda_2 \eta_2$$

$$\zeta_2 = k_1. \quad \text{Hieraus berechnet sich}$$

$$\zeta_2 = z_1$$

$$\zeta_1 = z_2 \quad \text{also} \quad (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = (z_1 - z_2)^2.$$

Ferner $\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\xi_1^2}{\lambda_1^2 b^2} = 1$

$$\xi_1^2 + \frac{a^2 + b^2\lambda_1^2}{a^2 b^2 \lambda_1^2} = x_1^2, \quad \text{ebenso:}$$

$$\xi_2^2 = x_2^2,\ \eta_1^2 = y_1^2,\ \eta_2^2 = y_2^2. \quad \text{Also:}$$

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 = z_2)^2$$

oder $PQ_1 = QP_1$.

Eine ganz ähnliche Bemerkung wie beim Ellipsoid in Bezug auf die Hyperboloide genügt hier, um den Satz auch auf den hyperbolischen Cylinder ausgedehnt zu haben.

Für den parabolischen Cylinder, dessen Gleichung in der Gestalt:

$$\frac{a^2}{a^2} = 2z$$

genommen werden kann, gestaltet sich die Rechnung folgendermassen.

Als Differentialgleichung der Krümmungslinien bleibt:

$$\frac{dydx}{a^2} = 0, \quad \text{deren Lösungen:}$$

$y = k$ und $x = y$ sind.

Für die Punkte P $x_1\, y_1\, z_1$ und $Q_1\, x_2\, y_2\, z_2$ erhält man: $k_1 = y_1 \qquad k_2 = y_2$

$\lambda_1 = x_1 \qquad \lambda_2 = x_2.$

Für den Schnitt P_1 der Curven (2) und (3) resp. Q der Curven (1) und (4) hat man:

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} = 2\zeta_1 \qquad \frac{\xi_2^2}{a^2} = 2\zeta_2$$

$$\eta_1 = k_2 \qquad \eta_2 = k_1$$

$$\xi_1 = \lambda_1 \qquad \xi_2 = \lambda_2.$$

Es ist also: $\eta_1 = y_2 \qquad \eta_2 = y_1$

$\xi_1 = x_1 \qquad \xi_2 = x_2$

$$2\zeta_1 = \frac{\xi_1^2}{a^2} = \frac{x_1^2}{a^2} = 2z_1$$

$\zeta_1 = z_1 \qquad \zeta_2 = z_2.$ Folglich

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

oder $PQ_1 = P_1Q.$

Nach diesem gilt also der Satz, dass in einem

durch 2 Paar von Krümmungslinien gebildetem Vierecke die geradlinigen Diagonalen einander gleich sind, ganz allgemein für alle Flächen zweiten Grades.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass die in dem Texte des oben genannten Engel'schen Atlas enthaltene Angabe, der Satz gelte auch für die abwickelbare Schraubenfläche, nicht richtig ist, wie es sich leicht durch eine ähnliche Untersuchung wie die vorliegende herausstellt.